

# DETERMINAÇÃO E INDETERMINAÇÃO NA FÍSICA MODERNA E CONTEMPORÂNEA

*Angelo Marinucci*

Universidade Federal de Pelotas

**Resumo:** Pretende-se apresentar neste artigo os temas do determinismo e do indeterminismo na física moderna e contemporânea, seguindo o desenvolvimento histórico. Nesse sentido, apoiando-se apenas em textos científicos, mostram-se os elementos do determinismo anterior a Poincaré. A respeito do indeterminismo, foca-se a atenção na introdução do caos determinístico, através do trabalho de Poincaré sobre o problema dos três corpos e da indeterminação quântica. Para cada uma das duas formas de indeterminação será fornecida também uma interpretação do estatuto gnosiológico.

**Palavras-chave:** Determinismo, indeterminação, física clássica, mecânica quântica, Lagrange, Laplace, Poincaré, Heisenberg.

**Abstract:** This article aims to present determinism and indeterminism in modern and contemporary physics, following their historical development. In this sense, the elements of determinism prior to Poincaré are shown using only scientific texts. On the subject of Determinism, the attention is focused on the introduction of deterministic chaos (through Poincaré's work on the three-body problem) and quantum indetermination. For both forms of indetermination, it is also provided a gnoseological interpretation.

**Keywords:** Determinism, indetermination, classical physics, quantum mechanics, Lagrange, Laplace, Poincaré, Heisenberg.

## Introdução

O assunto principal deste artigo consiste em introduzir os temas do determinismo e do indeterminismo na física moderna e contemporânea, por serem estes conceitos frequentemente tratados e usados, sobretudo em âmbito filosófico, de maneira culpadamente inadequada<sup>1</sup>. Nesse sentido, o foco deste artigo será a questão *filosófica* do determinismo e do indeterminismo, analisada

---

<sup>1</sup> Frequentemente, por exemplo nas perspectivas morais hoje em dia usa-se ainda o conceito científico de "determinismo" na forma de Laplace, sem aprofundá-lo e desconsiderando completamente Poincaré e a existência de algo como o "caos determinístico". Além disso, naqueles casos nos quais este último conceito aparece, jamais se considera qual é o tipo de indeterminação que o caos introduz, a saber, sem considerar seu estatuto gnosiológico.

diretamente a partir dos textos *científicos*<sup>2</sup>. Esta escolha bibliográfica é devida ao fato de que tentar-se-á fornecer uma base geral para um uso mais fundamentado dos conceitos objetos deste artigo. Portanto, sem perder a perspectiva epistemológica, mostrar-se-á o desenvolvimento histórico do problema do determinismo até chegar no indeterminismo na física clássica. A partir da recepção dos *Principia* de Newton sobretudo na França e na Alemanha, o artigo analisa o conceito de determinismo ligado à relação entre ciência e natureza anterior a Poincaré e, conseqüentemente, a forma de indeterminação introduzida por Poincaré mesmo, que produz o assim chamado “caos determinístico”.

Além da física clássica, este artigo aborda também o problema da indeterminação na mecânica quântica, enquanto tem um estatuto gnosiológico diferente daquele da física clássica. Nesse sentido, mostrar-se-á como a teoria quântica precisa repensar a relação entre o domínio da possibilidade e o da realidade. Por questões de espaço, a atenção será focada na interpretação de Copenhague, com algumas referências nas notas à interpretação de Everett. O *Apêndice* apresenta um aprofundamento mais técnico da questão da indeterminação na física clássica.

## Determinismo e indeterminismo na física clássica

Buscando clareza expositiva, na medida do possível, seguir-se-á o fio condutor do problema dos três corpos, no que tange ao determinismo e ao indeterminismo na física clássica. O problema dos três corpos refere-se ao cálculo da órbita de três planetas que se atraem reciprocamente. Desde Kepler e Newton sabe-se resolver o problema dos dois corpos, portanto, fiéis ao método newtoniano, todos os cientistas até Poincaré tentaram resolver o problema dos três corpos partindo do simples, e resolvendo problema dos dois corpos com adição de perturbações, para chegar sempre mais perto da órbita certa. Nesse sentido, parafraseando uma passagem de Euler (EULER, 1960, p. 47-49), ele supõe primeiramente que as órbitas de Júpiter e de Saturno não sejam excêntricas e que estejam no mesmo plano e, a partir disso, ele calcula as irregularidades com as observações. Secundariamente, mantendo a órbita de Júpiter circular, ele considera a excentricidade de Saturno, chegando até novos

---

<sup>2</sup> No âmbito da física anterior a Poincaré, podem-se considerar determinismo e determinação praticamente como sinônimos enquanto, como se mostrará, a teoria é determinística e se pressupõe que a determinação das trajetórias seja sempre possível. Na física posterior a Poincaré, a teoria fica determinística, mas não é mais possível determinar as trajetórias por causa da sensibilidade às condições iniciais.

valores das irregularidades, diferentes dos anteriores e mais próximos à natureza. Seguindo este método, os passos ulteriores consistem em considerar a excentricidade de Júpiter e a inclinação das órbitas dos planetas. Embora adicione ulteriores complicações, Euler não consegue chegar a alguma solução global. Não é preciso acompanhar de perto todas as tentativas de solução deste problema, enquanto o exemplo de Euler mostra suficientemente que o problema dos três corpos era considerado como o problema dos dois corpos mais perturbações. Tratava-se basicamente de dois problemas qualitativamente iguais. Poincaré, ao contrário, demonstrará justamente que se trata de dois problemas qualitativamente diferentes, isto é, que não podem ser tratados da mesma forma. O cientista francês demonstra matematicamente que o problema dos três corpos não tem soluções globalmente estáveis. De um ponto de vista epistemológico, este assunto se torna particularmente interessante porque, embora desde Newton existissem a matemática e a física do que depois de Poincaré se chama “caos determinístico”, este conceito não emerge. Nesse sentido, as causas disso são epistemológicas e, em particular, dependem da maneira pela qual se considerava a relação entre matemática, física e natureza (MARINUCCI, 2011). Não é trivial lembrar que esse problema foi enfrentado por quase todos os cientistas mais importantes dos séculos XVIII e XIX, como Euler, Clairaut, Lagrange etc.

## **O determinismo na física clássica**

Contextualizando as relações entre matemática, física e natureza, é preciso ressaltar que os historiadores da matemática distinguem, entre o começo do século XVIII e o final do XIX, três períodos do cálculo, a saber, o “cálculo geométrico” (NEWTON), a “análise algébrica” e a “análise clássica” (FRASER, 1989). O período que mais interessa é o da análise algébrica. Ela se caracteriza por considerar a matemática a linguagem da natureza e não apenas um instrumento útil para conhecer a natureza. Nesse sentido, o cálculo não era uma linguagem humana, mas pertencia à natureza. Adicione-se que, se reduz-se cartesianamente o estudo da natureza à determinação de matéria e movimento e se considera-se que as equações diferenciais descrevem este último, então pareceria mesmo possível descobrir todos os segredos da natureza<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> Em breve, considerando a celebre passagem de *Il Saggiatore* de Galilei, à qual faz-se aqui explícita referência, a física moderna posterior a Newton substitui o cálculo à geometria (GALILEI, 2005).

A relação entre matemática e natureza, típica da análise algébrica, está presente praticamente em todos os textos dos maiores cientistas da época em questão:

Possuímos já vários tratados de mecânica, mas o projeto desse é inteiramente novo. Eu tento reduzir a teoria dessa ciência, e a arte de resolver os problemas relativos a ela, a fórmulas gerais, o simples desenvolvimento dos quais se fornece todas as equações necessárias para a solução de qualquer problema. Espero que a maneira pela qual procurei alcançar esse objetivo não deixe nada a desejar (...). Nessa obra não serão encontradas figuras [*figures*]. Os métodos que exponho não necessitam de construções nem de raciocínios geométricos ou mecânicos, mas apenas das operações algébricas, submetidas a um procedimento regular e uniforme. Aqueles que amam a análise, verão com prazer que a mecânica se transformou em uma especialidade [*branche*], e serão gratos a mim por eu ter ampliado o domínio (LAGRANGE, 1788, VI)<sup>4</sup>.

O estudo aprofundado da natureza é a fonte mais fecunda das descobertas matemáticas. Esse estudo não possui apenas a vantagem, ao apresentar um objeto bem determinado de investigação, de excluir questões vagas e cálculos sem sentido; ela é também um método seguro para construir a análise mesma, e para descobrir os elementos dela que para nós são os mais importantes para conhecer e que essa ciência tem sempre que conservar: estes elementos fundamentais são aqueles que se reproduzem em todos os efeitos naturais (FOURIER, 1888, XXII-XXIII).

Estes são apenas dois claros exemplos que mostram como se estruturava a relação entre natureza, problemas físicos e cálculo, mas se tornam ainda mais interessantes ao se tratar de dois textos que representam alguns dos cumes mais altos da ciência daquele tempo. Em particular, a *Mecânica analítica* de Lagrange é o ponto de chegada do percurso que começa no início do século XVIII e que se caracteriza pela tradução da geometria dos *Principia* na linguagem do cálculo, integrando todas as novidades da física daquele período (BLAY, 1992).

A passagem na qual Lagrange afirma que a “mecânica tornou-se uma *branche*” do cálculo mostra claramente a tentativa de redução da mecânica ao cálculo (FRASER, 1987; FRASER, 1989). O fato de que Fourier afirme que é possível excluir “questões vagas e cálculos sem sentido” envolve e remarca a

---

<sup>4</sup> Todas as traduções as quais não correspondem textos em português são minhas.

mistura entre propriedades físicas e soluções de equações matemáticas. Em outras palavras, era lícito usar propriedades e elementos *físicos* dentro do processo de solução *matemática* de equações diferenciais (MARINUCCI, 2011). Que seja uma prova disso o fato de que, excluindo Cauchy, jamais puseram-se problemas de existência de soluções de equações diferenciais, aliás, onde encontravam-se dificuldades, confiava-se sempre no desenvolvimento do cálculo. Nesse sentido, é particularmente significativo que Euler e Lagrange se expressaram nesses termos nas “memórias” sobre o problema dos três corpos (EULER, 1960a; EULER, 1960b; LAGRANGE, 1884a), sem tomar em consideração a possibilidade da inexistência de soluções. Retornam os problemas ligados à visão filosófica da natureza (WILSON, 1995). O fato de considerar o cálculo como a essência da natureza atrasou de fato a exigência de *fundamentação* do cálculo. Na verdade, os resultados obtidos pela física estavam na frente de todo mundo e eram tão grandes que tornavam mesmo quase incontestável considerar um *instrumento* para conhecer como o conhecimento da natureza.

A partir dos textos de Lagrange, Fourier, Laplace etc. deriva-se, portanto, a ideia que, do ponto de vista matemático, para obter os resultados desejados, seja suficiente e necessária apenas a *formalização*, mais precisa possível, porque a *exatidão* dos procedimentos *matemáticos*, junta à *certeza física* dos resultados matemáticos, era, neste contexto conceitual específico, sinônimo de *verdade*.

A redução dos problemas físicos ao cálculo (LAGRANGE, 1788; LAGRANGE, 1884b) e o decorrente uso, hoje impossível, de propriedades físicas na resolução de problemas matemáticos é típico da “análise algébrica” e se manifesta de forma mais clara no uso do instrumento da “linearização”. Ele *não* era considerado como algo que permitisse trabalhar com certas equações diferenciais, mas era considerado como o elemento capaz de mostrar a causa ou as causas responsáveis de um determinado fenômeno, conforme o princípio, também superado por Poincaré, pelo qual existe uma proporcionalidade direta entre causas e efeitos. No caso do problema dos três corpos, embora esse discurso tenha um valor geral, não se achava possível que pequenas perturbações pudessem ter efeitos similares àqueles das assim chamadas “causas essenciais”. Novamente, propõe-se um assunto filosófico, que teve um influência enorme na maneira de fazer ciência. Nesse sentido, Laplace afirma:

Na maioria das vezes os fenômenos naturais são complicados por causas estrangeiras [étrangères]: um número enorme de causas perturbadoras introduz influências, tanto que é muito difícil reconhecê-los. Para conseguir é preciso multiplicar as observações ou os experimentos, até que, destruindo-se reciprocamente

os efeitos estranhos, os resultados médios ponham em evidência os fenômenos e os diferentes elementos deles. (LAPLACE, 2010, p. 42-43).

Se o efeito das perturbações é destinado a desaparecer, então se mantém sempre uma proporcionalidade entre causas e efeitos, fechando assim toda possibilidade de pensar em algo como a “sensibilidade às condições iniciais”. Em outros termos, quando escrevia-se um sistema não linear  $H$  como  $H = H_0 + \varepsilon H_1$  onde  $H_0$  é a parte integrável,  $H_1$  é a parte não integrável e  $\varepsilon$  é o parâmetro de perturbação, pensava-se que com a variação de  $\varepsilon$  a perturbação não conseguisse produzir efeitos macroscópicos na dinâmica. Ao contrário, depois de Poincaré, com a sua variação é necessário estudar o sistema de forma completamente diferente (TABOR, 1989, p. 89-186; DIACU e HOLMES, 1996).

Se de um certo ponto de vista as perturbações devidas às causas “étrangères” (LAPLACE, 1967, *passim*) se eliminam mutualmente, as perturbações devidas às causas essenciais, como a gravidade, devem ser tratadas de forma diferente.

Toda observação tem como expressão analítica uma função dos elementos que se querem determinar; e, se eles são mais ou menos conhecidos, a função se torna uma função *linear* das correções deles. Igualando-a à observação, forma-se uma *equação de condição*. Caso se tenha muitas equações deste tipo, combinam-se para obter tantas equações finais quantos são os elementos, dos quais se determinam posteriormente as correções, resolvendo equações. (LAPLACE, 1967, p. 300).

Geralmente os erros dos resultados deduzidos por um grande número de observações são funções *lineares* dos erros parciais de cada observação.<sup>5</sup> (LAPLACE, 1967, p. 305-306).

A respeito do problema dos três corpos, as perturbações eram sempre tratadas pelas equações diferenciais, pressupondo que sejam sempre resolvíveis, na pior das hipóteses através da linearização, concebida como o instrumento capaz de detectar a trajetória necessária de um fenômeno. O instrumento matemático da linearização dá corpo às exigências filosóficas de ordem e simplicidade da natureza. Na verdade, admitir que o problema dos três corpos

---

<sup>5</sup> O itálico é meu.

poderia ter sido insolúvel, teria significado renunciar a uma imagem do mundo bem definida e que permitiu enormes resultados científicos<sup>6</sup>.

Praticamente, poder resolver problemas físicos significava, no âmbito da física moderna, lidar com problemas matemáticos *lineares* ou, de qualquer forma, poder reduzir tudo a eles, enquanto não se tratava apenas de problemas resolvíveis matematicamente, mas a solução era garantida pela natureza mesma. A linearidade de uma equação diferencial, e igualmente a possível linearização por aproximações de equações não lineares, era o elemento que permitia conhecer globalmente o passado e o futuro, porque a evolução matemática de uma dinâmica pode ser acompanhada e prevista, sem ter de lidar com a sensibilidade às condições iniciais. A linearização não era usada apenas para tratar de uma equação não linear, mas significava, mais sutilmente, descobrir o termo linear, globalmente responsável por uma dinâmica.

Nesse sentido, *do ponto de vista dos efeitos*, não linearidade e perturbação, entendida como simples ruído, são parcialmente confundíveis<sup>7</sup>.

Como será explicado na próxima seção e no *Apêndice*, os efeitos da não linearidade aparecem depois de um tempo, chamado “tempo de Lyapunov”: é só a partir dele que duas trajetórias começam a divergir exponencialmente. Caso se pressuponha que é sempre possível chegar às soluções de equações diferenciais e caso se raciocine como se o acesso à medida fosse sempre certo, então a não linearidade se apresenta mesmo como um simples ruído, cujo efeito fica irrelevante. Nesse sentido, Laplace sustenta:

Todos os eventos, mesmo aqueles que pela sua pequenez, não parecem respeitar as grandes leis da natureza, são uma consequência necessária, assim como as revoluções do sol (...). Os acontecimentos atuais têm com os anteriores uma ligação fundamentada no princípio evidente de que nada pode começar a ser sem uma causa que o produza. Este axioma, conhecido como *princípio de razão suficiente*, estende-se também às ações que julgamos indiferentes. (LAPLACE, 2010, p. 41).

Devemos considerar o estado presente do Universo como o efeito de seu estado anterior e como a causa do que vai se seguir. Uma inteligência que, em um dado instante, conhecesse todas as forças que animam a natureza e a situação respectiva dos seres que a compõem, e, além disso, fosse suficientemente ampla para

---

<sup>6</sup> A respeito do problema dos três corpos, é importante lembrar as soluções particulares encontradas por Lagrange, os equilíbrios de Lagrange (LAGRANGE, 1884a), úteis hoje em dia para manter os satélites em órbita.

<sup>7</sup> Para aprofundar esse assunto, veja-se o *Apêndice*.

submeter todos esses dados à análise, compreenderia na mesma fórmula os movimentos dos maiores corpos do Universo e aqueles do mais leve átomo; nada lhe seria incerto, e o futuro bem como o passado estariam presentes em seus olhos. (LAPLACE, 2010, p. 42-43).

Com base nesta citação, o demônio de Laplace tem essencialmente as seguintes super capacidades: 1. conhece as leis que regem o universo; 2. é capaz de conhecer perfeitamente as condições iniciais de qualquer sistema; 3. tem uma capacidade computacional infinita. Frente a isso, o demônio consegue verdadeiramente eliminar o ruído e prever completamente o desenvolvimento do sistema do mundo. Que neste caso esteja presente uma sobreposição entre efeitos da não linearidade e ruído ressalta ainda mais quando se compara o segundo superpoder com o que se disse a respeito das condições iniciais em um sistema não linear. O demônio consegue uma imagem instantânea perfeita de um sistema qualquer, a saber, ter um acesso exato à medida; é a partir disso que consegue conhecer totalmente passado e futuro.

Na próxima seção citar-se-á uma passagem de Poincaré que, não por acaso, é uma citação dessa última passagem de Laplace, com modificações pequenas, mas que escondem uma grande mudança no pensamento.

A partir do que foi dito até o momento, no período considerado, instaurou-se uma dupla implicação entre *determinismo* e *previsibilidade*, pela qual é possível prever todos os estados de um sistema, então ele é determinístico e, se um sistema é determinístico, então podem-se prever todos seus estados. Consequentemente, *não* há possibilidades além da determinação.

De forma geral, pode-se afirmar que no interior do quadro reducionista e determinístico, através das equações diferenciais, a física clássica refere-se *diretamente* à realidade; entre equações e fenômenos físicos há uma relação pela qual tudo o que é calculável pode ser medido, portanto, tudo o que é teoricamente possível é *passível* de entrar no domínio da realidade.

De forma mais rigorosa, pode-se dizer que no interior da análise algébrica a solução (ou integral) geral pressupõe todas as trajetórias “possíveis” de um certo fenômeno; serão as condições particulares do fenômeno que determinarão a integral particular. Para que tudo isto seja possível, é preciso estabelecer até que ponto *não* exista alguma solução de continuidade entre matemática e natureza. Se entre elas *não* há solução de continuidade, então as *possibilidades teóricas* são diretamente derivadas das condições físicas *reais* do fenômeno.

Além do lado histórico, é preciso lembrar que as soluções matemáticas não descrevem trajetórias “possíveis”, dadas certas condições, mas *necessá-*

*rias*. Consequentemente, considerando o mesmo fenômeno, dadas as condições iniciais diferentes, ter-se-ão sempre trajetórias diferentes, mas todas necessárias.

Nesse contexto, não há algum espaço epistemológico para a indeterminação, ela aparece apenas no erro ligado à medida, mas ele é sempre considerado incapaz de ter efeitos tais para modificar radicalmente uma dinâmica.

## A indeterminação na física clássica

É razoável afirmar que, no período que está sendo discutido, a primeira forma de indeterminação se apresente, pelo menos no âmbito científico, quando Poincaré quebra a dupla implicação entre determinismo e previsibilidade, típica da ciência moderna posterior a Newton.

Se é possível afirmar que até Poincaré as possibilidades são *internas* à determinação, para poder sustentar algo diferente é preciso, além de mostrar a indeterminação clássica, estabelecer seu estatuto teórico. É exatamente neste momento que o mencionado estudo de Poincaré sobre o problema dos três corpos (POINCARÉ, 1890) pode ser considerado um ponto de viravolta (BARROW-GREEN, 1997): é a partir de seu “resultado negativo” (LONGO, 2010) que se abre o espaço teórico para a teoria do caos, pela qual assiste-se à reintrodução de instrumentos geométricos que, como vemos em Lagrange, foram colocados em segundo plano.

Como foi dito, as equações da física clássica descrevem um objeto que cai como a órbita de um planeta de maneira *direta*. Em outros termos, do ponto de vista teórico, o que se calcula é o que se mede. Isso é evidente nos caos *lineares*, mas é aplicável igualmente àqueles *não-lineares* não integráveis, embora lide-se com uma indeterminação. A explicação está no esclarecimento do tipo de indeterminação da física clássica. Em geral, ela se apresenta e fica sempre em um quadro teórico determinístico, o da teoria das equações diferenciais, que trabalha no contínuo. Em outras palavras, as trajetórias determináveis são e ficam sempre geodéticas, isto é, percursos *necessários*. Da mesma forma, no caso de um rio de montanha, o percurso irregular da água é uma otimização das forças (particularmente claro em uma formulação hamiltoniana) e, portanto, a água seguirá sempre uma geodética, embora seu caminho apareça completamente casual.

Nesse contexto geral, Poincaré descobre que as soluções do problema dos três corpos são *globalmente instáveis*<sup>8</sup>. Nesses casos, não funciona nem sequer o método da expansão em série, enquanto ao aumentar dos termos não é possível chegar a uma solução exata porque a série é divergente (BARROW-GREEN, 1997; TABOR, 1989). É importante ressaltar que até Poincaré este instrumento era usado *pressupondo* factualmente que as séries fossem assintoticamente convergentes e que fosse assim possível chegar ao tipo de solução desejada<sup>9</sup>. Em outras palavras, quando se quer descrever um fenômeno não é possível medir com exatidão absoluta suas condições iniciais, conseqüentemente, o acesso à medida é tão problemático que um pequeno erro possível, menor de um entorno  $\epsilon$  pequeno qualquer que seja, pode produzir uma divergência exponencial entre uma trajetória calculada e uma outra, cujas condições iniciais variam de um valor menor de  $\epsilon$ <sup>10</sup>. Retomando e revertendo a citação de Laplace, pode-se afirmar que os efeitos das perturbações *não* chegam *necessariamente* a “destruir-se reciprocamente”.

Uma causa mínima, que escapa de nós, determina um efeito notável, do qual não podemos não perceber... Se conhecêssemos com precisão as leis da natureza e o estado do universo ao instante inicial, poderíamos prever qual será o estado deste universo mesmo no instante seguinte. Porém, mesmo se as leis naturais não tivessem mais segredos para nós, poderíamos conhecer o estado inicial só *aproximativamente*. Se isso permite conhecer o estado seguinte com a mesma *aproximação*, não precisamos de nada mais e afirmaremos que o fenômeno foi previsto, que existem leis que o dirigem. Porém, não é sempre assim: pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam diferenças grandíssimas nos fenômenos finais; um pequeno erro a respeito das primeiras produziria, então, um erro enorme a respeito desses últimos. A previsão se tornaria impossível, estamos diante de um fenômeno fortuito. (POINCARÉ, 1907).

Nesta passagem há uma clara referência a um dos trechos citados de Laplace, mas a maneira na qual os conceitos são usados muda completamente seu significado. Na verdade, a capacidade computacional infinita do demônio de Laplace não é suficiente para enfrentar o “aproximativamente” de Poincaré

<sup>8</sup> Veja-se o *Apêndice*.

<sup>9</sup> O editor das *Œuvres de Fourier*, na edição do 1888, ressalta suas reservas a respeito do rigor do cientista francês, afirmando que “o método [de Fourier] consiste em expressar com uma integral definida a soma dos primeiros termos da série e, secundariamente, buscar o limite desta integral” (FOURIER, 1888, p. 158).

<sup>10</sup> Trata-se, em outros termos, da sensibilidade às condições iniciais, conhecida também como efeito borboleta.

enquanto, sendo na matemática do contínuo, entre dois número há infinitos números, portanto, no ato de calcular haverá sempre uma aproximação que, por menor que possa ser, não conseguirá fugir da sensibilidade às condições iniciais<sup>11</sup>.

Nesse sentido, trata-se de uma indeterminação, devida à sensibilidade às condições iniciais, enquanto se trata, de um ponto de vista matemático, de um problema de acesso à medida. Na verdade, dadas as condições iniciais, cada trajetória é determinada através das equações<sup>12</sup>: é a divergência exponencial entre duas o mais trajetórias que não pode ser determinada: há sempre um erro possível, menor da medida, que limita a previsibilidade.

É preciso salientar que, *do ponto de vista gnosiológico*, trata-se sempre de trajetórias *necessárias* e não de trajetórias possíveis. *Do ponto de vista das condições de existência do objeto*, pode-se determinar o respectivo das condições *reais* de existência do objeto na teoria que se usa. No caso não linear, do ponto de vista da teoria, uma equação diferencial pressupõe o conjunto de trajetórias possíveis (sempre dentro da determinação real), embora a sensibilidade às condições iniciais impeça de prever a trajetória efetiva. Tratando-se de uma indeterminação *não* intrínseca à teoria, ela pode ser chamada “epistêmica”<sup>13</sup>. Nesse sentido, a física clássica continua caracterizando suas descrições (trajetórias) pela necessidade e fica sempre no domínio da realidade.

Consequentemente, cada trajetória é *um caminho “necessário” no domínio da realidade*, enquanto o *conjunto* das trajetórias, pressupostas por uma equação diferencial, representa um conjunto de caminhos “possíveis” no domínio da realidade. Na verdade, considerando as trajetórias possíveis de um fenômeno no espaço das fases, não se trata propriamente de um conjunto de possíveis que podem se tornar reais; trata-se de *realidades possíveis*, enquanto todas são passíveis de se tornar efetivas. Claramente, pode-se ficar usando a dupla “possível – real” no lugar de “realidade possível – realidade efetiva”, porém arrisque de cair em confusões teóricas, quando se fala da mecânica quântica e de possibilidades que *não são passíveis* de entrar no domínio da realidade. Além disso, se todos os possíveis são passíveis de realidade, então a possibilidade fica verdadeiramente e estritamente dependente da realidade e de suas condições

---

<sup>11</sup> Nesse sentido, o demônio de Laplace parece mais um computador do que um deus.

<sup>12</sup> Veja-se o *Apêndice*.

<sup>13</sup> Caracteriza-se as indeterminações, conforme Bailly e Longo (BAILLY e LONGO, 2006), como “epistêmica” ou “epistemológica”. Este segundo tipo indeterminação se caracteriza pelo fato de que ela é *intrínseca* à teoria. Como ver-se-á a respeito da mecânica quântica, o fato de que a *teoria* descreva indiretamente seu objeto através das probabilidades não pressupõe nada a mais, como ocorre nas equações diferenciais da física clássica. Em breve, a forma de indeterminação é definida a partir da estrutura da teoria que está se considerando.

reais de determinação: o que é possível é tal enquanto pode se tornar real e não porque a possibilidade constitua um domínio próprio, como ocorre em mecânica quântica. Igualmente, de um ponto de vista filosófico, fica-se inteiramente no domínio da realidade; que uma física *determinística* possa produzir apenas trajetórias *necessárias* envolve a impossibilidade de se pôr no domínio do possível. Ao contrário do que emergirá tratando da emancipação da possibilidade em relação à realidade na mecânica quântica, também depois de Poincaré a possibilidade fica achatada na realidade, tornando-se uma duplicação dela, já que não tem nenhum traço próprio e caracterizante.

O domínio do possível contém o que pode e o que não pode entrar no domínio da realidade e, portanto, tem de ser independente da realidade. Em outros termos, os dois domínios (possibilidade e realidade) caracterizam duas diferentes perspectivas epistemológicas a respeito do mesmo objeto. A diferença emergirá, claramente falando, da mecânica quântica, mas é importante ressaltar que na física clássica eles praticamente coincidem. Se não há saltos entre cálculo e medida e se trabalha-se no interior de um quadro determinístico, todas as trajetórias são necessárias, *reais* e, embora não sejam todas *efetivas*, ficarão sempre passíveis de sê-lo. Visto que uma equação diferencial pressupõe *a priori* a lista completa das configurações possíveis de um sistema em um espaço das fases pertinente, a trajetória efetiva será, por princípio, incluída naquelas cognoscíveis, mas indetermináveis: por isso se fala nomeadamente de caos determinístico e não simplesmente de caos.

A objeção óbvia que se pode continuar colocando é que o resultado “negativo” de Poincaré introduz uma *indeterminação* na física clássica pela qual, como se disse, nem todos os sistemas determinísticos são previsíveis, como se achava antes de Poincaré. Esta objeção poderia ser interpretada como uma maneira de repensar a relação entre possibilidade e realidade na mecânica clássica. É preciso, porém, ressaltar com qual *tipo* de indeterminação se está lidando na física clássica. Ela depende do problema da *medida*, próprio da matemática do *contínuo*, domínio no qual estão as equações diferenciais. Do ponto de vista da descrição teórico-matemática, a equação diferencial de um fenômeno o descreve completamente. O fato de que um erro, menor do que a medida, possa produzir uma divergência exponencial nas trajetórias de um determinado entorno *não depende de um limite teórico*, portanto, lida-se com uma indeterminação *epistêmica* e não epistemológica, a saber, ela *não* é intrínseca à teoria. Como se disse, as equações diferenciais continuam pressupondo todas as trajetórias do espaço das fases; o problema se refere à determinação daquela *efetiva*. Nesse sentido, o problema da medida não se põe entre “possibilidade” (no sentido

expressado neste artigo) e realidade, mas fica dentro da realidade entre realidade possível e efetiva, além de ser *extrínseco* à determinação teórica.

## A indeterminação na mecânica quântica

Já vimos como na física clássica se pode falar apenas de possibilidades dentro da determinação: embora Poincaré introduza uma indeterminação epistêmica, ela não invalida o fato de que a construção teórica seja determinística, não é por acaso que se fala de caos determinístico. A opção de poder considerar as “possibilidades” como “realidades possíveis”, além das razões expostas, se baseia nos novos problemas postos pela mecânica quântica no domínio do possível e responde às exigências filosóficas que se referem à maneira pela qual a física quântica lida com o próprio objeto.

Do ponto de vista teórico, um objeto pode ser estudado determinando *o que* ele é, definindo suas propriedades etc., mas deve-se preliminarmente estabelecer *a maneira pela qual* (o *como*) ele é posto para o conhecimento (TAGLIAGAMBE, 1991, p. 212). Dois casos diferentes são dados pela física clássica e pela mecânica quântica. Na primeira, determina-se o que o objeto é enquanto objeto real, estabelecendo suas configurações possíveis em um espaço das fases pertinente que contém justamente as possibilidades *reais*. Na segunda, não é possível agir da mesma forma, porque existem possibilidades que não são passíveis de entrar no domínio da realidade. A questão da indeterminação e da relação entre possibilidade e realidade se põe de maneira nova na mecânica quântica.

Em *Física e filosofia*, lê-se:

Nós “objetivamos” uma afirmação se pretendemos que seu conteúdo não dependa da condição sob a qual ela pode ser verificada. O realismo prático diz que existem afirmações que podem ser objetivadas e que, na verdade, a maior parte de nossa experiência da vida do dia-a-dia consiste em tais afirmações. O realismo dogmático pretende que não existem asserções acerca do mundo material que não podem ser objetivadas. (...), na verdade, a posição da física clássica é a do realismo dogmático. (...) Em particular em física [clássica], o fato de que podemos explicar a natureza por meio de simples leis matemáticas diz que trabalhamos com verdadeiros caracteres de realidade e não com algo que inventamos – em qualquer significado do termo. (...). Porém a teoria dos *quanta* é um exemplo da possibilidade de explicar a natureza por meio de simples leis matemáticas

---

ser ter de se apoiar naquela base. (...). A ciência natural é, na verdade, possível sem a base do realismo dogmático. (HEISENBERG, 2011, p. 125).

As palavras de Heisenberg escondem uma profunda exigência de reconsiderar a maneira pela qual estrutura-se a relação entre matemática e natureza que, neste artigo, não é possível acompanhar em todos os detalhes, ainda que seja possível ressaltar elementos essenciais. Como dito, se na física clássica todos os estados *possíveis* de um sistema são *passíveis* de entrar no domínio da realidade, na mecânica quântica isto não acontece porque ela se refere apenas *indiretamente* a seus objetos. Retomando o que se disse, se na física clássica o que se calcula *é* o que se mede, na mecânica quântica o que se calcula *não é* o que se mede (BAILLY e LONGO, 2006). Na verdade, considerando o gato de Schrödinger, a partir da *linearidade* de  $\Psi$ , que descreve seu estado, deriva-se que, se  $A$  e  $B$  são soluções, então também  $A+B$  é uma solução. Por isso, o gato pode estar contemporaneamente vivo e morto: esta é uma das possibilidades, ou “estado potencial” (HEISENBERG, 2011), que se calcula, mas que *não é passível* de entrar na realidade. As possibilidades “reais”, as que para usar as palavras de Einstein têm uma contraparte real (EINSTEIN, PODOLSKI e ROSEN, 1935), são apenas que o gato seja vivo ou morto. A partir disto, derivam os problemas e as opções teóricas relativas à passagem de gato “vivo *vel* morto” para “vivo *aut* morto”<sup>14</sup>. Por enquanto não é preciso entrar nessas discussões (GHIRARDI, 2009; OMNÉS, 1994), é preciso ressaltar que Heisenberg começa a pôr o problema da separação entre possibilidade e realidade e, conseqüentemente, ponha a redefinição dos domínios e das perguntas, as quais respondem a física clássica e a mecânica quântica. Para ser o mais claro possível e para as necessidades impostas pela mecânica quântica, pode-se definir “possível” tudo o que se calcula e que deriva da teoria, além do fato de que seja ou não passível de entrar na “realidade”. Pode-se definir “realidade possível” (ou potencial) o que é *passível* de entrar na “realidade efetiva”, definida por sua vez como *hic et nunc*, como o que se mede. Em outros termos, caso se associe a noção de “possibilidade” à mecânica quântica (gato vivo *vel* morto), então é necessário associar as possibilidades da física clássica à “realidade possível”. Obviamente, as razões desta escolha serão expostas no artigo, mas elas

---

<sup>14</sup> Usam-se os termos latinos *vel* e *aut* porque o primeiro é uma disjunção inclusiva enquanto o outro disjuntiva.

se enraízam, em boa parte, na diversidade de objetos que os dois tipos de “possibilidade”, a clássica (realidade possível) e a quântica, contêm<sup>15</sup>.

Nesse sentido, a primeira frase da citação de Heisenberg (“Nós “objetivamos” uma afirmação se pretendemos que seu conteúdo não dependa da condição sob a qual ela pode ser verificada”) veicula um outro elemento extremamente interessante. Tentando interpretar essa afirmação e, ao mesmo tempo, tentando ir além, pode-se sustentar que a física clássica e a mecânica quântica descrevem de forma diferente a realidade (ROVELLI, 1996). Como foi dito, se a primeira lida *diretamente* com a natureza, a segunda lida *indiretamente*; enquanto que uma equação em física clássica determina a dinâmica de um fenômeno e, portanto, descreve diretamente seu objeto, na mecânica quântica a equação de Schrödinger descreve a *probabilidade* referida a estados; em outras palavras, não se ocupa do objeto, mas da probabilidade de que ele esteja em um certo estado ou em um outro. Se Rovelli (ROVELLI, 2010; ROVELLI, 1996) afirma justamente que a mecânica quântica se ocupa de *como* os sistemas interagem, pode-se sustentar que a física clássica, ao contrário, responde à pergunta “o que é algo?”, define-o para depois estudar “como é”. Isso envolve uma distância filosófica e também teórico-matemática até o momento intransponível, mas que oferece bastante elementos de reflexão.

A citação de Heisenberg põe justamente a questão de pensar *possibilidades* que *não são passíveis* de acessar ao domínio da *realidade*. Ao contrário do que ocorre na física clássica, na mecânica quântica nem todos os possíveis teóricos têm uma contraparte física real<sup>16</sup>, nem sequer é imediatamente evidente como acontece a passagem da realidade potencial àquela efetiva. Não é por acaso que no celebre artigo EPR (EINSTEIN, PODOLSKI e ROSEN, 1935, *passim*) repete-se muitas vezes que em uma teoria completa a cada elemento corresponde um elemento da realidade. Antes de introduzir, ainda que sinteticamente, as razões *matemáticas* que explicam as possibilidades de um sistema quântico e a irreduzível contingência que caracteriza a passagem da realidade potencial àquela efetiva, é mais do que oportuno propor o experimento mental do “gato de Schrödinger” (1935) para facilitar a exposição.

Um gato é trancado dentro de uma câmara de aço, juntamente com o dispositivo seguinte (que devemos preservar da interferência direta do gato): num tubo

<sup>15</sup> Adicione-se as diferenças que derivam do fato de que se trata de duas teorias construídas de forma diferente e que não apenas interrogam a natureza de forma diversa, mas também que recebem respostas entre si contraditórias.

<sup>16</sup> Em (EINSTEIN, PODOLSKI e ROSEN, 1935), afirma-se em itálico: “Cada elemento da realidade física tem de ter uma contraparte na teoria física”.

contador Geiger há uma pequena porção de substância radioativa, tão pequena que talvez, no decurso de uma hora, um dos seus átomos decaia, mas também, com igual probabilidade, talvez nenhum decaia; se isso acontecer, o tubo contador libera uma descarga e através de um relé solta um martelo que estilhaça um pequeno frasco com ácido cianídrico. Se deixarmos todo este sistema isolado durante uma hora, então diremos que o gato ainda vive, se nenhum átomo decaiu durante esse tempo. A função  $\Psi$  do sistema como um todo iria expressar isso, contendo em si mesma o gato vivo e o gato morto simultaneamente ou dispostos em partes iguais. (SCHRÖDINGER, 1935, p. 812).

As possibilidades são que o gato esteja vivo, morto e vivo *vel* morto. Esta última pode ser considerada como o elemento que contradiz o “realismo dogmático” criticado por Heisenberg (1958). Como mencionado, ela *não* pode ser derivada pelos elementos físicos, mas sim pelo fato de que a equação de Schrödinger é linear. Que “[ $\Psi$ ] seja linear envolve que, se  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são duas soluções, então podemos obter uma outra solução  $\psi$  combinando-as linearmente:  $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ , onde  $c_1$  e  $c_2$  são duas constantes. Portanto,  $\psi$  representa um estado de sobreposição»  $\psi_1$  e  $\psi_2$ ” (GUICCIARDINI e INTROZZI, 2007, p. 149).

Esse último representa a possibilidade que *não* é passível de entrar no domínio da realidade, a saber, na mecânica quântica o que se calcula *não* é o que se mede e, olhando bem, o cálculo se refere à parte teórica, às possibilidades que a teoria produz, enquanto a medida se refere exclusivamente ao domínio da realidade.

Esses elementos já mostram que se lida com um espaço das possibilidades que não pode ser reduzido ao da realidade<sup>17</sup>. A possibilidade “gato vivo *vel* morto”, derivada de uma propriedade matemática, constitui junto às outras a *totalidade* das possibilidades daquele sistema. Como na física clássica, igualmente na mecânica quântica, as possibilidades são completamente dadas *a priori*. Todavia, além de constituir-se, pelo menos parcialmente, em forma diferente, aqui se põe o problema ulterior da passagem da possibilidade à realidade potencial, enquanto não é preciso que para cada termo de uma equação ou para cada solução tenha de existir uma contraparte real<sup>18</sup>.

<sup>17</sup> É sempre útil lembrar que Bell mostrou que não é possível “completar” a mecânica quântica como Einstein auspiciava (ASPECT e GRANGIER, 1982).

<sup>18</sup> Tudo isso, naturalmente, acompanhando a interpretação ortodoxa de Copenhague; existem, na verdade, outras opções teóricas (GHIRARDI, 2009). A respeito dos conceitos de possibilidade e realidade é preciso mencionar pelo menos a interpretação de “muitos mundos”, enquanto mantém os conceitos na forma da física clássica. De maneira geral, a ideia de (EVERETT, 1957) é que o estado

Provavelmente, só agora entende-se plenamente por que sustentou-se que o domínio da física clássica fosse o da realidade: na verdade, a indeterminação “clássica”, onde quer que esteja presente, é devida ao problema da “medida”, que afere ao domínio da realidade. Ao contrário, a possibilidade quântica do gato “vivo *vel* morto” é uma questão puramente matemática e teórica, desvinculada de qualquer descrição direta do objeto quântico. Adicione-se a isso uma reflexão sobre o estatuto da indeterminação quântica, sendo ela profundamente diferente da clássica.

A mecânica quântica não fala de trajetórias no sentido de geodéticas que descrevem o movimento de seus objetos, mas de funções de onda de probabilidade: ela fala da *probabilidade* de encontrar o objeto em um estado ou em um outro e *não diretamente de seu objeto*. A física dos *quanta* é, portanto, *intrinsecamente* probabilística (OMNÉS, 1994). Isso significa que a probabilidade não tem de ser pensada como uma distância da verdade, como Laplace achava (LAPLACE, 2010), mas como o resultado ao qual chega uma teoria probabilística e como testemunho de sua irredutível indeterminação *epistemológica*.

Do ponto de vista filosófico, isso é devido ao fato de que a mecânica quântica não responde à mesma pergunta da física clássica: ela descreve *como* dois ou mais sistemas *interagem* (ROVELLI, 1996). Este elemento é teoricamente de extrema importância, por várias razões. Antes de mais nada, o teorema de Bell (ASPECT, GRANIER, 1982) exclui a possibilidade de dar seguimento à ideia das “variáveis escondidas” e, portanto, não se pode reconduzir, pelo menos por esse caminho, a física dos *quanta* no alveo da clássica. Neste caso, na verdade, o valor das variáveis de um sistema descreve no tempo o estado do sistema mesmo, dado um espaço das fases. Na mecânica quântica, ao invés, as variáveis não têm um valor determinado por cada *t*, mas apenas no momento no qual dois ou mais sistemas interagem. Heisenberg mostrou muito bem como é possível estabelecer a posição de uma partícula *interagindo* com ela, caso contrário ela fica indeterminada, a saber, a posição *não* é uma propriedade *real* anterior à medida: o *estado* (quântico) do sistema, *a respeito daquela propriedade específica*, é descrito pela função de onda, não por um valor bem definido, que aparece apenas no momento em que ocorre uma interação, em que se perde a coerência quântica (OMNÉS, 1994). A física clássica, que afere ao domínio da

---

$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\text{Gatto vivo}\rangle + |\text{Gatto morto}\rangle)$  contém possíveis *todos* passíveis de entrar no domínio da realidade. A partir disso, Everett afirma que se o gato estará vivo após a medida, estará morto em uma realidade paralela e inconciliável com a nossa. Confere-se, praticamente, uma validade universal à equação de Schrödinger e tenta-se superar assim o problema da redução do pacote. Fica em aberto o problema de como medir a outra realidade.

realidade, descreve um objeto, cujas propriedades existem *antes* da medida ou de uma interação qualquer.

Se a mecânica quântica ocupa-se de *como* os sistemas interagem, é preciso focar a atenção mais na relação entre eles do que nos sistemas considerados singularmente. Portanto, não é suficiente definir as coordenadas macroscópicas e microscópicas e *posteriormente* fazê-las interagir. Para pensar na decoerência, isto é, a passagem da possibilidade à realidade possível, é essencial considerá-las como *distintas e inseparáveis*: não é suficiente *justapô-las*, é necessário *mantê-las juntas*. Em outros termos, o sistema em geral se define *durante* a interação e não anteriormente, dessa maneira assume as propriedades que o caracterizam. Esta diferença pode ser expressa na forma seguinte:

$$H = H_c + H_e$$

onde  $H$  é o sistema globalmente considerado,  $H_c$  e  $H_e$  representam respectivamente a parte macroscópica e a microscópica. Claramente, uma simples justaposição não permite nenhuma troca energética:  $H_c$  e  $H_e$  são, antes de mais nada, *isolados* e depois juntados. Se, ao contrário, eles são considerados como distintos e inseparáveis, é possível pensar e dar conta de um efeito de *dissipação térmica*. Nesse sentido, pode-se escrever:

$$H = H_c + H_e + H_{int}$$

onde  $H_{int}$  representa a dissipação (OMNÉS, 1994).

Se a possibilidade se constitui a partir de elementos *externos* à determinação, a passagem da possibilidade à realidade potencial se dá a partir da *interação*, desde que esta última tenha um estatuto epistemológico próprio, a saber, que traga novos elementos na descrição teórica do sistema, permitindo assim um *espaço teórico* para  $H_{int}$ . Por exemplo, no nível do cálculo é possível determinar todos os estados *possíveis* do paradoxo do gato antes de abrir a caixa; entre eles a sobreposição representa o estado que não pode entrar na realidade. Nesse sentido, a possibilidade se *emancipa* da realidade. Trata-se de algo completamente diferente do que ocorre na física clássica, porque nem todas as possibilidades são passíveis de entrar no domínio da realidade: *não é preciso que o possível seja “destinado” a se realizar*, ainda que potencialmente<sup>19</sup>.

---

<sup>19</sup> Fazendo referência ao que se disse, embora só nas notas, a respeito da interpretação de muitos mundos, é preciso salientar que este é exatamente o ponto crucial no qual “ortodoxos” e “não ortodoxos” em geral divergem.

A falta de necessidade implica que seja pelo menos complicado estabelecer nexos causais nesse tipo de processos; na verdade, lida-se com uma irreduzível *contingência*, típica dos fenômenos quânticos e devida à maneira pela qual é construída a teoria. Em geral, caso se abandone a perspectiva determinística, torna-se possível emancipar a possibilidade da realidade.

Esquemáticamente, ter-se-á:

1. O nível da possibilidade (coerência quântica).
2. O nível da realidade potencial ou possível (decoerência quântica).
3. O nível da realidade efetiva (medida).

Do ponto de vista filosófico, essas observações mostram que na mecânica quântica é o “como” (a interação) que predispõe, e não determina, o conhecimento do “o que é algo”, isto é, fornece elementos de realidade potencial para o objeto que, como dito, resolvem-se só no momento da medida.

Trata-se, é útil especificar, de uma interação *a-causal*<sup>20</sup> que permite a passagem da realidade potencial àquela efetiva. Neste sentido, a contingência desenvolve um papel fundamental, mesmo que se conheça *a priori* a totalidade dos possíveis. Este é um aspeto essencial que torna possível compreender o valor do estatuto probabilístico da mecânica quântica e o sentido *epistemológico* de sua indeterminação. Por essas razões, se não for possível descrever um sistema quântico fora de uma interação qualquer, por exemplo, com um “sistema observante”, então inclusive a *universalidade* de sua descrição deve ser posta em questão (ROVELLI, 1996).

Como mencionado na introdução, na mecânica quântica a possibilidade começa se emancipar da realidade. Na verdade, o quadro teórico fundamental muda tanto que deixa de ser determinístico, tornando-se probabilístico. Nesse sentido, a física dos *quanta* pode falar apenas *indiretamente* da natureza, por causa de uma assimetria entre cálculo e medida. Isso não representa uma limitação, mas uma nova maneira de interrogar a natureza, que abre novos horizontes teóricos.

---

<sup>20</sup> Pode-se facilmente intuir que a linha interpretativa não ortodoxa tende a manter a causalidade, embora interpretada no sentido probabilístico, coerentemente com uma diferente interpretação da relação entre possibilidade e realidade.

## Conclusão

Visto que este artigo é introdutório, para concluir é útil resumir os elementos mais importantes que foram apresentados. Neste sentido, mostraram-se os elementos que caracterizam as formas de determinismo, determinação, indeterminismo e indeterminação na ciência moderna e contemporânea. No interior da física clássica e antes de Poincaré, determinismo e previsibilidade se envolvem reciprocamente e é sempre possível determinar as trajetórias de um fenômeno qualquer. Depois de Poincaré e da descoberta da sensibilidade às condições iniciais, não pode-se mais afirmar que todas as trajetórias de um sistema determinístico sejam previsíveis. Isto impõe um tratamento diferente das equações diferenciais não-lineares não integráveis. Um dos instrumentos para isso é o expoente de Lyapunov, exposto muito sinteticamente no *Apêndice*<sup>21</sup>. A respeito da física clássica mostrou-se também a relação entre possibilidade e realidade funcionalmente aos temas da indeterminismo na mecânica quântica. Conforme Heisenberg, nesta última se põe o problema de repensar na relação entre possibilidade e realidade. Neste sentido, apontou-se para uma direção possível de entender a possibilidade quântica, partindo da ideia que se na física clássica tudo o que é calculável pode ser medido, na mecânica quântica isto não acontece. Consequentemente, enfrentou-se de forma geral uma das opções para resolver o problema do gato de Schrödinger, enquanto se na física clássica o indeterminismo é epistêmico, isto é extrínseco à teoria, na mecânica quântica é epistemológico, a saber, intrínseco à teoria.

## Apêndice

### A não linearidade e o expoente de Lyapunov

O que se disse a respeito da física clássica não tem de levar a pensar na relação entre linearidade e não linearidade, em uma perspectiva matemática, como uma comparação entre um modelo errado e um certo, enquanto Poincaré amplia os horizontes dos cientistas anteriores. Na verdade, não é preciso que a não linearidade envolva uma divergência exponencial das trajetórias; trata-se de algo *possível*. Existem casos nos quais as trajetórias são *estáveis* e, portanto, a divergência não ocorre. Para saber isso, é preciso estudar a sua estabilidade.

---

<sup>21</sup> Obviamente, existem outras ferramentas que não podem ser expostas neste artigo. Na bibliografia encontram-se textos para aprofundar este tema.

Para explicar esse ponto, nesse apêndice falar-se-á sinteticamente da maneira pela qual a não linearidade pode ser tratada. Far-se-á exclusiva referência aos “exponentes de Lyapunov”, lembrando que a bibliografia contém textos para um ulterior aprofundamento.

Em geral, um sistema pode ser ou não ser reduzido a poucos graus de liberdade<sup>22</sup>. No primeiro caso, lida-se com um sistema determinístico que, por sua vez, pode ser ou não ser sensível às condições iniciais; no segundo caso, o sistema tem um comportamento estocástico<sup>23</sup>. Um exemplo de sistema determinístico não sensível às condições iniciais é o que descreve a trajetória, completamente previsível *a priori*, de uma bola de canhão. Querendo atingir um alvo, configuram-se todos os parâmetros necessários do canhão para isso. Obviamente, não é possível evitar um erro mínimo, porém ela afetará de forma mínima o atingimento do alvo: mantém-se uma proporcionalidade direta entre causas e efeitos. Em outros termos, uma melhora nas condições iniciais determina *proporcionalmente* uma precisão maior da bola.

Um exemplo de sistema determinístico sensível às condições iniciais é o já mencionado problema dos três corpos.

Mencionou-se que Lagrange encontrou soluções particulares ao problema dos três corpos; porém, ao contrário do que achava o cientista francês, uma solução particular *não* é capaz de esclarecer o andamento geral da dinâmica.

Dadas as dificuldades, frequentemente inultrapassáveis, em tratar analiticamente e *quantitativamente* as equações diferenciais, o matemático Lyapunov (1857-1918) mostrou que é possível estudar *qualitativamente* a estabilidade de um sistema. Como dito, um sistema sensível às condições iniciais é tal que um pequeno erro pode ter efeitos macroscópicos, tornando a dinâmica instável; no caso contrário, a dinâmica é estável.

De forma mais precisa, considerando o seguinte sistema de equações:

estudar a natureza das posições de equilíbrio significa assumir sua existência, impondo as derivadas iguais a zero. Para tratar o problema matematicamente, é preciso linearizar, impondo:

---

<sup>22</sup> Pela expressão “graus de liberdade” entende-se o número de coordenadas necessárias para descrever univocamente um sistema.

<sup>23</sup> Obviamente, não é possível aprofundar a desordem estocástica nem sequer a diferença com a desordem do caos.

$$\begin{cases} |\bar{x}(t) - x(t)| < \varepsilon \\ |\bar{y}(t) - y(t)| < \varepsilon \end{cases}$$

com  $\bar{x} = \bar{x}(t)$  e  $\bar{y} = \bar{y}(t)$  soluções do sistema, isto é, como posições de equilíbrio que é preciso estudar.

A linearização produz o seguinte sistema de equações diferenciais lineares, chamado sistema de primeira aproximação para um sistema não linear:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = cx + gy \\ \frac{dy}{dt} = ax + by \end{cases}$$

com  $a, b, c, g$  constantes. Achar as soluções significa achar os zeros. Caso se queira estudar a dinâmica *em geral*, é preciso se perguntar quais são as condições para que o sistema seja satisfeito, isto é, quais são as condições para que a dinâmica seja estável, *a partir das condições postas*. É bom lembrar que até Poincaré e Lyapunov pressupunha-se um tipo de estudo parecido, em que um sistema linearizado determinava completamente a dinâmica do sistema não linear inicial. Poincaré demonstrou a falsidade deste tipo de suposição, no qual se baseava a maneira matemática e filosófica de lidar com problemas físicos.

Voltando ao sistema *linearizado* chega-se<sup>24</sup> à seguinte equação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (b+c)\frac{dx}{dt} - (ag-bc)x = 0$$

cuja equação característica é:

$$\lambda^2 - (b+c)\lambda - (ag-bc) = 0$$

Através do estudo das raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  é possível conhecer o andamento da dinâmica da equação diferencial *linearizada*, no entorno considerado, e não da equação original não linear.

<sup>24</sup> Para aprofundar os detalhes matemáticos veja-se (PISKUNOV, 1979, p. 126 e s.).

é a solução do sistema *linearizado*; a partir disso, pode-se estudar a *estabilidade* nos limites da condições postas:

$$\begin{cases} |\bar{x}(t) - x(t)| < \varepsilon \\ |\bar{y}(t) - y(t)| < \varepsilon \end{cases}$$

O expoente  $\lambda$  é,  $x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$  finalmente, o elemento que permite caracterizar *qualitativamente* uma dinâmica caótica e, em particular, permite saber se ela é estável ou instável, limitadamente às condições postas. Neste artigo não é possível tratar completamente de  $\lambda$ ; será suficiente dizer que há instabilidade por  $\lambda > 0$ . Em outros termos,  $\lambda > 0$  é a tradução<sup>25</sup> matemática que permite ter uma estimativa da emergência dos efeitos da sensibilidade às condições iniciais. De forma mais geral, pode-se afirmar que a evolução *exponencial* da perda de informação pode ser tratada cientificamente através dos expoentes de Lyapunov. Em particular, usa-se o *tempo de Lyapunov*, o tempo que caracteriza a velocidade do afastamento das trajetórias em um sistema não linear. Ele pode ser interpretado como a medida a partir da qual serão macroscopicamente evidentes os efeitos da não linearidade; através dele podem-se estabelecer, *convencionalmente*, os limites da possibilidade de prever de forma atendível, as configurações de um dado sistema<sup>26</sup>. É importante lembrar sempre que se trata de um estudo *qualitativo*, a saber, não está se determinando a dinâmica efetiva das trajetórias.

*Do ponto de vista dos efeitos* de uma dinâmica caótica em geral, torna-se essencial, conforme o tema do artigo, não a não linearidade em si, mas a *comparação* entre os efeitos da linearidade e da não linearidade *antes* do tempo de Lyapunov. Considerando o problema dos três corpos, sendo o tempo de Lyapunov enorme, é factualmente possível prever a posição de um planeta com

<sup>25</sup> A partir apenas das condições matemáticas postas, já emerge claramente que, nesse contexto, “traduzir” não significa absolutamente chegar até a essência de algo, mas interpretar.

<sup>26</sup> Neste caso, *não* se pode falar realmente de um verdadeiro *valor limiar*, mas de *tempo característico*, enquanto é convencional, estabelecido em boa parte qualitativamente a partir de  $\tau = 1/\lambda$ , onde  $\tau$  é o tempo de Lyapunov e  $\lambda$  é o expoente de Lyapunov. É bom repetir que estes expoentes fornecem uma estimativa *qualitativa* da perda de informação, que pode não necessariamente corresponder à efetiva realização de previsões. Por exemplo, a respeito da meteorologia, não pode-se considerar atendíveis as previsões além de uma semana ou ainda menos. Isso mostra que se trata de um valor *qualitativo*.

razoável precisão, *sem dar conta da não linearidade*<sup>27</sup>. Neste contexto, a não linearidade não desaparece como se fosse um simples ruído, mas neste caso específico, o sistema solar pode ser tratado *como se fosse linear*. Pode-se sustentar, então, que este é um elemento indireto e *a posteriori* que pode clarear uma das razões pelas quais, antes de Poincaré, por aproximadamente duzentos anos, instaurou-se uma certa relação entre matemática e natureza<sup>28</sup>.

É importante ressaltar que, ultrapassado o tempo de Lyapunov, é possível afirmar apenas *que* o sistema mudará profundamente seu estado, porém não se pode prever *qual* estado se produzirá, isto é, não se pode prever qual tipo de ordem/caos emergirá, a saber, se e qual atrator estranho aparecerá em uma região definida do espaço das fases<sup>29</sup>. Entende-se agora melhor como eram pensados os *efeitos* da não linearidade no interior da cultura científica dos séculos XVIII e XIX.

## Referências

- ALEXANDROV, A. D.; KOLMOGOROV, A.; LAVRENT'EV, M. *Le matematiche*. Torino: Bollati Boringhieri, 2004.
- ASPECT, A.; GRANGIER, P.; ROGER, G. "Experimental Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities". In: *Phys. Rev. Let.* 49 (1982), p. 91.
- BAILLY, F.; LONGO, G. *Mathématiques et sciences de la nature*. Hermann, 2006.
- BARROW-GREEN, J. *Poincaré and the three body problem*. American Mathematical Society, 1997.
- BERTUGLIA, C. S.; VAIO, F. *Non linearità, caos, complessità*. Torino: Bollati Boringhieri, 2003.
- BLAY, M. *La naissance de la mécanique analytique*. Paris: Presses Université de France, 1992.
- BOLTZMANN, L. *Populäre Schriften*. Berlin: Springer, 1979.
- BOTTAZZINI, U. "I Principia di Newton e la Mécanique di Lagrange: osservazioni su meccanica e calcolo". In: *Radici, significato, retaggio dell'opera*

<sup>27</sup> Considerando a meteorologia entende-se de forma imediata como o tempo de Lyapunov seja breve comparado com os tempos astronômicos.

<sup>28</sup> Claramente, isto não significa que tudo mudou, hoje em dia há ainda perspectivas filosóficas e científicas que sustentam que a matemática é a linguagem da natureza, por exemplo, na biologia e na mesma física.

<sup>29</sup> Este assunto foge do foco deste artigo, embora seja sua lógica continuação.

*newtoniana*. Eds. por M. Tarozzi G. e Van Vloten. Società Italiana di Fisica, 1989.

\_\_\_\_\_. *Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass*. Torino: Bollati Boringhieri, 1981.

\_\_\_\_\_. *Il flauto di Hilbert*. Torino: UTET, 2007.

BOYER, C. B. *Storia del calcolo*. Milano: Bruno Mondadori, 2007.

DALMETICO, A. D.; CHABERT, J.-L.; CHEMLA, K. (eds.). *Chaos et déterminisme*. Edition du Seuil, 1992.

DIACU, F.; HOLMES, P. *Celestial encounters*. Princeton: Princeton University Press, 1996.

EINSTEIN, A.; PODOLSKI, B.; ROSEN, N. "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?". In: *Physical review* 47 (1935).

EULER, L. "Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturn et de Jupiter". In: *Opera omnia*. Serie 2. Lipsia: 25, 1960.

\_\_\_\_\_. "Recherches sur le mouvement des corps célestes en général". In: *Opera omnia*. Vol. 25. Serie 2. Lipsia, 1960.

EVERETT, H. "'Relative state' formulation of quantum mechanics". In: *Reviews of modern physics* 29 (1957), p. 454-462.

FOURIER, J. B. J. "Théorie analytique de l chaleur". In: *Œuvres de Fourier*. Vol. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1888.

FRASER, C. G. "Isoperimetric problems in the variational calculus of Euler and Lagrange". In: *Historia Mathematica* 19.1 (1992), p. 4-23.

\_\_\_\_\_. "J. L. Lagrange's changing approach to the foundation of the calculus of variations". In: *Archive for History of exact Sciences* 32.2 (1985), p. 151-191.

\_\_\_\_\_. "J. L. Lagrange's early contributions to the principles and method of mechanics". In: *Archive for History of exact Sciences* 28.3 (1983), p. 197-241.

\_\_\_\_\_. "Joseph Louis Lagrange's algebraical vision of the calculus". In: *Historia Mathematica* 14.1 (1987), p. 38-53.

\_\_\_\_\_. "The background to and early emergence of Euler's analysis". In: *Analysis and synthesis in mathematics*. Eds. por Otte M. e Panza M. Dordrecht Boston London: Kluwer Academic Publishers, 2001.

\_\_\_\_\_. "The calculus as algebraic analysis: some observations on mathematical analysis in the 18 th century". In: *Archive for History of exact Sciences* 39.4 (1989), p. 317-335.

GALILEI, G. "Il Saggiatore". In: *Opere*. Vol. 1. Torino: UTET, 2005.

GHIRARDI, G. C. *Un'occhiata alle carte di Dio*. Milano: Il Saggiatore, 2009.

- GUICCIARDINI, N.; INTROZZI, G. *Fisica quantistica. Una introduzione*. Roma: Carocci, 2007.
- HEISENBERG, W. *Physik und Philosophie*. Stuttgart: Hirzel, 2011.
- \_\_\_\_\_. *La partie et le tout. le monde de la physique atomique*. Paris: Flammarion, 2010.
- ISRAEL, G. “Il determinismo e la teoria delle equazioni differenziali ordinarie”. In: *Physis* XXVIII.2 (1991).
- \_\_\_\_\_. *La visione matematica della realtà*. Roma-Bari: Laterza, 2003.
- LAGRANGE, J.-L. “Essai sur le problème des trois corps”. In: *Œuvres de Lagrange*. Tomo VI. Paris: Gauthier-Villars, 1884.
- \_\_\_\_\_. “Leçons sur le calcul des fonctions”. In: *Œuvres de Lagrange*. Tomo X. Paris: Gauthier-Villars, 1884.
- \_\_\_\_\_. *Mécanique analytique*. Paris: La Veuve Desaint, 1788.
- LAPLACE, P. S. *Ensaio filosófico sobre as probabilidades*. Rio de Janeiro: PUC-Rio, 2010.
- LONGO, G. “Incompletezza”. In: *Per la Matematica*. Vol. 4. Torino: Einaudi, 2010.
- MARINUCCI, A. *Tra ordine e caos. Metodi e linguaggi tra fisica, matematica e filosofia*. Roma: Aracne, 2011.
- NEWTON, I. *Principi matematici della filosofia naturale*. Milano: Arnoldo Mondadori, 2008.
- OMNÉS, R. *The interpretation of quantum mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1994.
- PISKUNOV, N. *Calcolo differenziale e integrale*. Vol. 2. Roma: Editori Riuniti, 1979.
- POINCARÉ, H. “Il problema dei tre corpi”. In: *Geometria e caos*. Ed. por Bartocci C. Torino: Bollati Boringhieri, 2006.
- \_\_\_\_\_. “Le hasard”. In: *Revue de mois* III (1907), p. 257-276. url: [http : / / henripoincarepapers.univ-nantes.fr/chp/text/hp1907rm.html](http://henripoincarepapers.univ-nantes.fr/chp/text/hp1907rm.html).
- \_\_\_\_\_. “Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique”. In: *Acta mathematica* 13 (1890), p. 1-270.
- ROVELLI, C. “Forget time”. 2008. url: <https://arxiv.org/pdf/0903.3832.pdf>.
- \_\_\_\_\_. “Is time’s arrow perspectival?” 2015. url: <https://arxiv.org/pdf/1505.01125v2.pdf>.
- \_\_\_\_\_. *Quantum gravity*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.
- \_\_\_\_\_. “Relational quantum mechanics”. In: *International journal of theoretical physics*. 8a sér. 35 (1996), p. 1637-1678.
- LADRIANI, G. S.; GIORILLI, A. (eds.). *Sfogliando la Mécanique analytique*. Giornata di studio su Louis Lagrange. Milano: LEL, 2008.

- SCHRÖDINGER, E. “Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik”. In: *Die Naturwissenschaften*, 23-48 (1935).
- TABOR, M. *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics*. New York: John Wiley e sons, 1989.
- TAGLIAGAMBE, S. *L'epistemologia contemporanea*. Roma: Editori Riuniti, 1991.
- VULPIANI, A. et al., ed. *Large deviation in physics*. Berlin-Heidelberg: Springer, 2014.
- WAFF, C. B. “Clairaut and the motion of the lunar apse: the inverse-square law undergoes a test”. In: *The general history of astronomy 2* (1995), p. 35-46.
- \_\_\_\_\_. “Universal gravitation and the motion of the moon's apogee: the establishment and reception of Newton's inverse-square law, 1687-1749”. Tese de doutorado. The Johns Hopkins University, 1976.
- WILSON, C. “The precession of the equinoxes from Newton to d'Alembert and Euler”. In: *The General History of Astronomy 2* (1995), p. 47-54.
- \_\_\_\_\_. “The problem of perturbation analytically treated: Euler, Clairaut, d'Alembert”. In: *The General History of Astronomy 2* (1995), p. 89-107.
- \_\_\_\_\_. “The work of Lagrange in celestial mechanics”. In: *The General History of Astronomy 2* (1995), p. 108-130.

Email: [angelico937@gmail.com](mailto:angelico937@gmail.com)

Recebido: 09/2020

Aprovado: 04/2021