

Recebido: 07-04-2013 Aceito: 27-09-2014

## Projeção da distribuição diamétrica de povoamentos eqüiâneos utilizando a função Nakagami e Weibull

Daniel Henrique Breda Binoti<sup>1\*</sup>, Mayra Luiza Marques da Silva Binoti<sup>2</sup>, Helio Garcia Leite<sup>3</sup><sup>1</sup>Dap Engenharia Florestal, Pós doutorando FAPEMIG/UFVJM, Diamantina, MG.<sup>2</sup>Professora Adjunta II, Departamento de Engenharia Florestal, Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri (UFVJM), Diamantina, MG.<sup>3</sup>Professor Titular, Departamento de Engenharia Florestal, Universidade Federal de Viçosa (UFV), Viçosa, MG.

**RESUMO** Objetivou-se neste estudo avaliar a eficiência da função Nakagami para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos de eucalipto, bem como ajustar um modelo de distribuição diamétrica utilizando esta função. Realizou-se também a modelagem da distribuição diamétrica utilizando a função Weibull para fins comparativos. Para isso, foram utilizados dados de parcelas permanentes de eucalipto localizadas no centro-oeste do estado de Minas Gerais, mensuradas em seis ocasiões. Ajustou-se as funções Nakagami e Weibull para todas as parcelas e em cada medição (nas idades médias de 28, 40, 52, 64, 76 e 84 meses). A aderência da função aos dados foi avaliada pelo teste Kolmogorov-Smirnov (K-S). A projeção da distribuição diamétrica foi realizada por meio de modelos não-lineares. Todos os ajustes apresentaram aderência aos dados. As equações que compõem o modelo de distribuição diamétrica apresentaram-se satisfatórias para a modelagem da distribuição diamétrica de povoamentos de eucalipto. A Função Weibull apresentou superioridade na descrição da distribuição diamétrica dos povoamentos estudados.

**Palavras-chave:** funções densidade de probabilidade, distribuição diamétrica, eucalipto.

## Projection of diametric distribution of even-aged stands using Nakagami and Weibull functions

**ABSTRACT** The objective of this study was to evaluate the efficiency of Nakagami function to describe diametric structure of eucalypt stands, and to adjust a model of diametric distribution using this function. We modeling the diametric distribution using Weibull function for comparative purposes. We used data from permanent eucalypt plots located in central-west region of the state of Minas Gerais, which was measured six times. We adjusted both Nakagami and Weibull functions for all plots and for each measurement (28, 40, 52, 64, 76 e 84 months). Adherence of function to the data was evaluated by Kolmogorov-Smirnov (K-S). The projection of the diametric distribution was performed according to Nogueira et al. (2005). All adjustments were fitting to the data. The equations that comprise the diametric distribution model were good for modeling the diametric distribution of eucalypt. Weibull was the best function to describe the diametric distribution of stands in this study.

**Keywords:** probability density functions, diametric distribution, eucalypt.

## Introdução

A predição da estrutura diamétrica de povoamentos florestais é essencial para definir a quantidade de produtos que serão obtidos, subsidiar as análises técnicas e econômicas dos projetos florestais, inferir sobre o estado de desenvolvimento do povoamento e simular regimes de manejo (GUIMARÃES, 1994; CAMPOS; LEITE, 2013).

A descrição das estimativas de frequência por classe diamétrica é realizada pela utilização de funções densidade de probabilidade (*fdp*). Dentre as diversas *fdp* utilizadas para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos equiâneos, destacam-se: Weibull, Normal, Log-normal, Gamma, Johnson's SB, Gram-Charlier, Beta, Log-logística, Cauchy, Frechet, Erlang, Rayleigh, e Hiper (BAILEY; DELL, 1973; HAFLEY; SCHREUDER, 1977; MALTAMO et al., 1995; MALTAMO et al., 2000; BINOTI, 2008; LEITE et al., 2010).

Apesar da existência de diversas funções estatísticas, o enfoque de modelagem tem sido o mesmo, com o predomínio de uma das formas da função Weibull. Dentre outras características, a boa correlação apresentada por seus parâmetros com características do povoamento tem sido fundamental para a escolha desta função Weibull.

A previsão de uma distribuição futura se dá pela estimação dos parâmetros da *fdp* em função de características do povoamento, tais como idade, densidade, índice de local, diâmetro mínimo e diâmetro máximo (CAMPOS; LEITE, 2009). Os modelos usuais de distribuição de diâmetros com a função Weibull tem apresentado resultados satisfatórios, principalmente em relação à estimativa do parâmetro de escala (GUIMARÃES, 1994, NOGUEIRA et al., 2005). No entanto, estudos na área de modelagem tem demonstrado que o parâmetro de forma desta função apresenta baixa correlação com características do povoamento (LEITE 1990; GUIMARÃES, 1994, NOGUEIRA et al., 2005).

Em 1960, Minoru Nakagami propôs a *fdp* conhecida como distribuição de Nakagami. Essa função tem sido muito utilizada em estudos sobre ondas de comunicações móveis terrestres, (SUSUKI, 1977; AULIN, 1981), comunicações de telefonia móvel em ambiente confinado (SHEIKH et al., 1993), em estudos enlaces de rádio ionosféricos (MENDONÇA, 2002) e, recentemente em estudos de previsão da distribuição diamétrica de plantios de *Tectona grandis* (BINOTI et al., 2012).

Objetivou-se neste estudo avaliar a eficiência da função Nakagami para a descrição da estrutura diamétrica de povoamentos de eucalipto, bem como ajustar um modelo de distribuição diamétrica utilizando esta função. Realizou-se também a modelagem da distribuição diamétrica utilizando a função Weibull para fins comparativos.

## Material e Métodos

### Seleção do material

Os dados utilizados neste estudo foram obtidos de 400 parcelas permanentes retangulares de 340 m<sup>2</sup>, totalizando cerca de 15.000 árvores instaladas em povoamentos de híbridos de *Eucalyptus grandis* x *Eucalyptus urophylla*, na região centro-oeste do estado de Minas Gerais, Brasil. Esses povoamentos foram estabelecidos sob arranjo espacial de 3 x 3 m, com rotação de corte média de 7 anos. Nesta idade, a produtividade média destes povoamentos variou entre 25 e 50 m<sup>3</sup>.ha<sup>-1</sup>.ano<sup>-1</sup>. As medições dos diâmetros das árvores foram efetuadas na região do DAP (1,30 m de altura do peito), considerando-se diâmetros mínimos de 5 cm e idades médias de 28, 40, 52, 64, 76 e 84 meses.

### Funções densidade de probabilidade (*fdp*)

A função Nakagami assume a seguinte forma (Equação 1):

$$f(x) = \frac{2m^m}{\Gamma(m)\Omega^m} x^{2m-1} e^{-\frac{m}{\Omega}x^2} \quad \text{Equação 1}$$

Em que:  $\Gamma(\cdot)$  é a função gama;  $\Omega$  é o parâmetro de escala ( $\Omega > 0$ ); O parâmetro de forma  $m$  ( $m > 0,5$ ) (NAKAGAMI, 1960). Para  $m=0,5$ , tem-se a distribuição gaussiana, enquanto para  $m=1$ , tem-se a *fdp* Rayleigh.

A função de densidade acumulativa é dada por (Equação 2):

$$F(x) = \frac{\Gamma_{mx^2}/\Omega(m)}{\Gamma(m)} \quad \text{Equação 2}$$

Os parâmetros da função podem ser obtidos pelos estimadores de momentos na Equação 3.

$$\begin{aligned} \Omega &= E\{x^2\} \\ m &= \frac{\Omega^2}{E\{(x^2 - \Omega)^2\}} \end{aligned} \quad \text{Equação 3}$$

A função Weibull pode ser descrita na Equação 4.

$$f(x) = \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\gamma-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma} \quad \text{Equação 4}$$

Em que:  $\beta$  é o parâmetro de escala ( $\beta > 0$ ) e  $\gamma$  é o parâmetro de forma ( $\gamma > 0$ ).

### Ajuste das Funções Densidade de Probabilidade (*fdp*)

Os dados de DAP observados em cada parcela foram agrupados em classes com amplitude de 1,0 cm. Os ajustes das *fdps* foram feitos utilizando o sistema FitFD, desenvolvido pelo projeto NeuroForest. Para avaliar a aderência da função aos dados, utilizou-se o teste Kolmogorov-Smirnov (K-S) (GIBBONS; SUBHABRATA, 1992). Realizou-se a análise entre valores estimados e observados para todos os ajustes obtidos com a função Nakagami.

### Modelo de distribuição diamétrica

A construção do modelo de distribuição diamétrica baseou-se na alternativa usual de correlação dos parâmetros

da *fdp* com as características do povoamento. Conforme Nogueira et al. (2005), utilizou-se como variáveis dependentes os parâmetros da função Nakagami e Weibull em uma idade futura, e como variáveis independentes, os parâmetros da função e características do povoamento em uma idade atual.

A redistribuição teórica dos diâmetros foi avaliada pela capacidade do sistema de equações em projetar o diâmetro máximo, o número total de árvores e os parâmetros da função Nakagami ( $m$  e  $\Omega$ ) e Weibull ( $\beta$  e  $\gamma$ ) para qualquer idade. O coeficiente de correlação entre os valores observados e estimados, bem como a análise gráfica dos resíduos, foram utilizados para avaliar a exatidão das estimativas do sistema de equações.

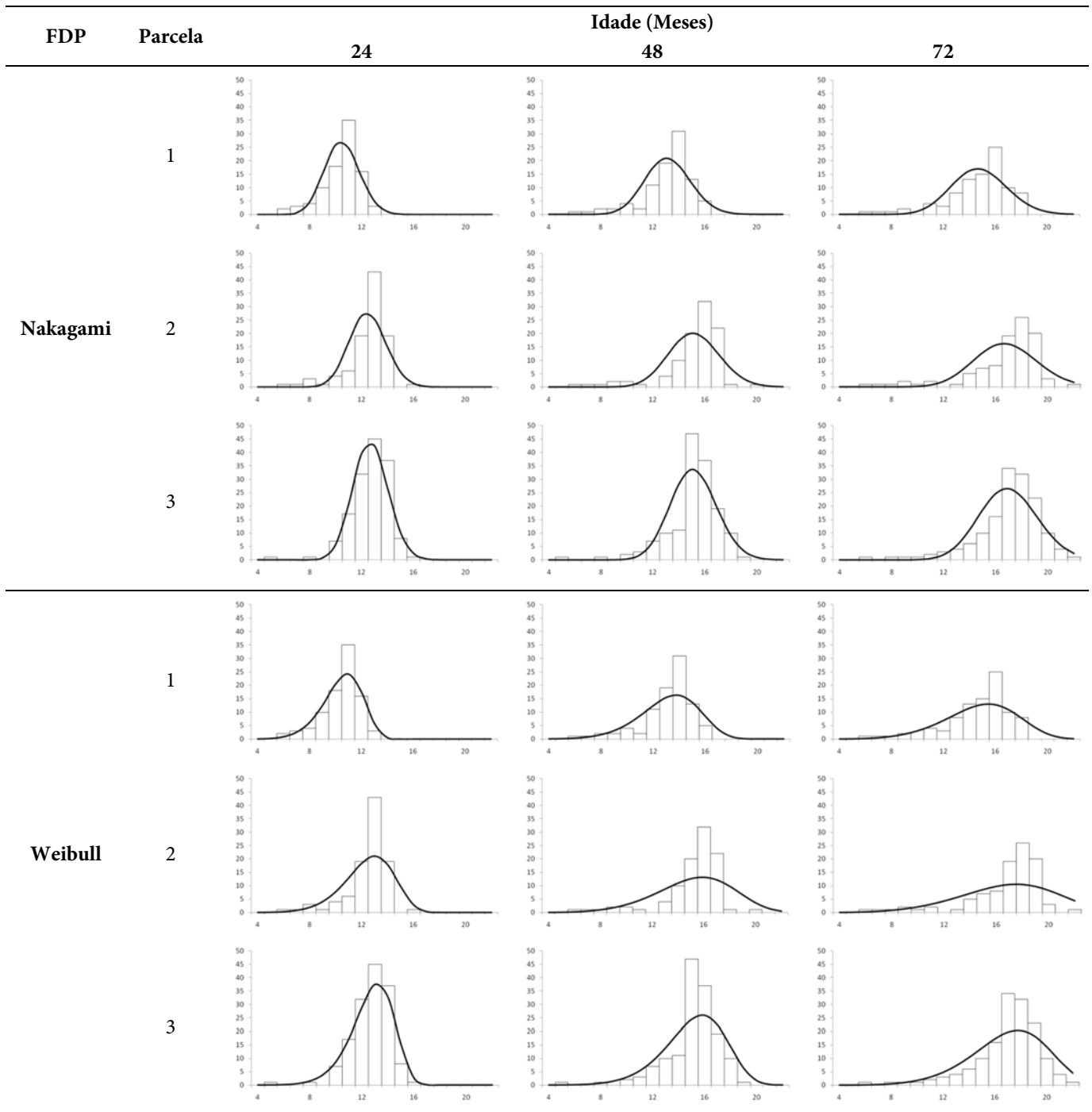
Foi avaliada a consistência, a capacidade de projeção e o realismo biológico do sistema, projetando diferentes distribuições iniciais observadas para idades futuras, e comparando com os respectivos valores observados de frequência por classe de diâmetro. Para avaliar a exatidão das estimativas geradas pelas equações que compõem o modelo de distribuição de diâmetros, estimou-se também a estatística RMSE (%) (raiz quadrada do erro médio) (Equação 5) (SIIPILEHTO, 2000).

$$\text{RMSE}(\%) = 100/\bar{Y} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y}_i)^2}{n}} \quad \text{Equação 5}$$

Em que:  $\bar{Y}$  é a média da saída observada e  $n$  é o número total de dados.

## Resultados e Discussão

Ajustou-se a função Nakagami e Weibull para todas as parcelas em cada medição, sendo cada estimativa comparada com a distribuição observada. Todos os ajustes resultaram em aderência aos dados pelo teste Kolmogorov-Smirnov ( $p > 0,01$ ). Os valores médios da estatística do teste K-S foram de 0,0706 e 0,0638 para a função Nakagami e Weibull,



**Figura 1.** Frequência observada e estimada pela função Nakagami e Weibull para povoamentos equiâneos de eucalipto em diferentes idades.

**Figure 1.** Values observed and estimated by Nakagami and Weibull functions for even-aged stands of eucalypt at different ages.

respectivamente. Três parcelas foram escolhidas aleatoriamente e seus ajustes são apresentados na Figura 1. Os modelos de distribuição diamétrica ajustados com seus respectivos coeficientes de correlação e RMSE(%) da função Nakagami são apresentados na Equação 6 e 7, da Weibull na

Equação 8, e 9 e de variáveis do povoamento na equação 10 e 11.

A dispersão gráfica dos resíduos percentuais e os histogramas da dispersão dos erros para cada equação que compõe o sistema são apresentados na Figura 2. Não houve

necessidade de projeção da densidade do povoamento em função do baixo índice de mortalidade observado.

A modelagem da distribuição de diâmetros em plantios de eucalipto, teca e pinus já foi exaustivamente estudada em diversos trabalhos (NELSON, 1964; BLISS; REINKER, 1965; CLUTTER; BENNETT, 1965; HAFLEY; SCHUREUDER, 1977; PALAHÍ et al., 2006; BAILEY; DELL, 1973;

NOGUEIRA et al., 2005; TÊO et al., 2011; BINOTI et al., 2012; ARAÚJO JÚNIOR et al., 2013).

Os modelos de distribuição diamétrica possibilitam maior flexibilidade na simulação de desbastes, bem como a avaliação de multiprodutos (LEITE, 1990; NOGUEIRA et al., 2005; CAMPOS; LEITE, 2013; LEITE et al., 2010).

$$\Omega_2 = \Omega_1 \left( \frac{I_1}{I_2} \right) + 27,2929 \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) \quad R_{yy} = 0,9703 \quad RMSE(\%) = 6,2053 \quad \text{Equação 6}$$

$$m_2 = m_1 e^{(-0,0790)(I_2^{0,6597} - I_1^{0,6597})} \quad R_{yy} = 0,9549 \quad RMSE(\%) = 21,6073 \quad \text{Equação 7}$$

$$\beta_2 = \beta_1 \left( \frac{I_1}{I_2} \right) + 20,7092 \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) \quad R_{yy} = 0,9551 \quad RMSE(\%) = 3,8295 \quad \text{Equação 8}$$

$$\ln \gamma_2 = \ln \gamma_1 e^{(-0,7429)(I_2^{0,3118} - I_1^{0,3118})} \quad R_{yy} = 0,9818 \quad RMSE(\%) = 13,3560 \quad \text{Equação 9}$$

$$dmax_2 = dmax_1 \left( \frac{I_1}{I_2} \right) + 25,3786 \left( 1 - \frac{I_1}{I_2} \right) \quad R_{yy} = 0,9525 \quad RMSE(\%) = 4,9460 \quad \text{Equação 10}$$

$$dmin_2 = dmin_1 e^{(-16,6040)(I_2^{-1,1574} - I_1^{-1,1574})} \quad R_{yy} = 0,8841 \quad RMSE(\%) = 8,7811 \quad \text{Equação 11}$$

Em que:  $I_1$  e  $I_2$  são as idades atual e futura, respectivamente, em meses;  $m_1$  e  $m_2$  são os parâmetros de forma da função Nakagami nas idades atual e futura;  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são os parâmetros de escala da função Nakagami nas idades atual e futura;  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são os parâmetros de forma da função Weibull nas idades atual e futura;  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são os parâmetros de escala da função Weibull nas idades atual e futura;  $dmax_1$  e  $dmax_2$  são os diâmetros máximos nas idades atual e futura, em cm,  $dmin_1$  e  $dmin_2$  são os diâmetros mínimos nas idades atual e futura, em cm; e  $q$  é a soma quadrática dos  $dap$ .

Tais modelos permitem a estimação do número de árvores por hectare por classe de diâmetro nas idades presente e futura, e apresentam como característica principal a utilização de uma  $fdp$ .

A escolha da  $fdp$  utilizada no modelo de distribuição diamétrica determina a precisão do modelo, sendo a capacidade de ajuste e recuperação de seus parâmetros, característica determinante para a utilização da  $fdp$ . A aderência verificada pelo teste K-S demonstra a capacidade das funções Nakagami e Weibull em descrever a distribuição diamétrica de povoamentos equiâneos de eucalipto, como pode ser observado na Figura 1.

Existe um consenso sobre a superioridade da função Weibull sobre as demais para a descrição da estrutura

diamétrica de florestas equiâneas (CAMPOS; LEITE, 2013). Segundo Guimarães (1994), esta superioridade se deve ao fato de as florestas equiâneas tenderem a apresentar distribuições assimétricas à direita em razão das maiores árvores possuírem maiores taxas de crescimento do que as árvores suprimidas (que possuem menores dimensões). Contudo, os estudos estatísticos tem proporcionado novas funções de densidade probabilidade com diferentes características, bem como flexibilidade e capacidade de ajuste. Conforme demonstrado por Leite et al. (2010), a função hiperbólica apresenta melhor flexibilidade e capacidade de projeção quando comparado a função Weibull. Dessa maneira, trabalhos como este devem ser realizados constantemente visando introduzir e avaliar a eficiência de outras funções densidade de probabilidade para

a descrição da distribuição diamétrica de povoamentos equiâneos.

O teste t foi significativo para todos os parâmetros em todas as equações que compõe os modelos de distribuição

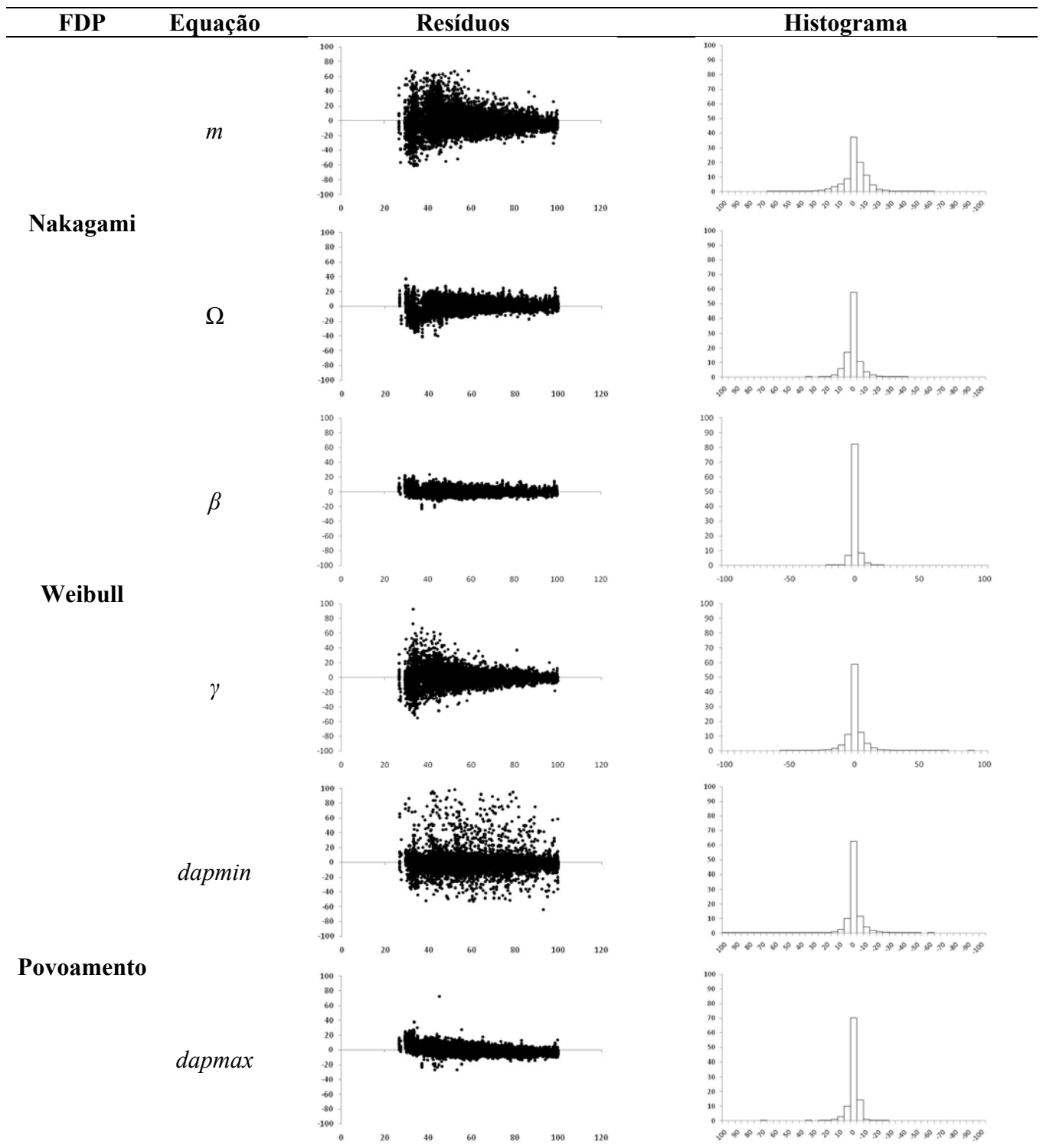


Figura 2. Dispersão e histograma de resíduos em função da idade do povoamento para as quatro equações que compõe o modelo de distribuição de diamétrica.

Figure 2. Scattering and histogram of residues as a function of the age of stand for the four equations of diameter distribution model.

diamétrica. Todas as equações apresentaram valores observados e estimados, indicando que as variáveis relativamente altas de coeficientes de correlação entre valores independentes utilizadas nas equações tem grande influência

nas variáveis dependentes. A análise gráfica dos resíduos permitiu inferir a inexistência de tendenciosidade nos ajustes (Figura 2). Este fato demonstra a capacidade de recuperação dos parâmetros da função Nakagami em idades futuras, comprovando a possibilidade de utilização desta função em modelos de distribuição diamétrica de povoamentos equiâneos de eucalipto.

Ao comparar as *fdps* Nakagami e Weibull, verificou-se que ambas conseguem descrever e projetar de maneira eficiente a distribuição diamétrica dos povoamentos avaliados, com relativa superioridade da função Weibull (menores RMSE% e melhor dispersão dos resíduos).

## Conclusões

A função densidade de probabilidade Nakagami é eficiente na descrição e projeção da estrutura diamétrica de povoamentos de eucalipto.

O modelo de projeção da estrutura diamétrica proposto mostrou-se eficiente para os dados do estudo.

## Referências

ARAÚJO JÚNIOR, C. A.; LEITE, H. G.; CASTRO, R. V. O.; BINOTI, D. H. B.; ALCÂNTARA, A. E. M.; BINOTI, M. L. M. S. Modelagem da distribuição diamétrica de povoamentos de eucalipto utilizando a função gama. *Cerne*, v.19, n.2, p.307-314, 2013.

AULIN, T. Characteristics of a digital mobile radio channel, *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, v.30 n.4 p.45-53. 1981.

BAILEY, R. L.; DELL, T. R. Quantifying diameter distributions with the Weibull function. *Forest Science*. v.19 n. 2, p. 97-104. 1973.

BINOTI, D. H. B. **Funções densidade de probabilidade para a descrição da distribuição diamétrica de povoamentos desbastados de *Tectona grandis***. 2008. 42 f. Monografia (Graduação em Engenharia Florestal) - Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2008.

BINOTI, D. H. B.; BINOTI, M. L. M. S.; LEITE, H. G.; FARDIN, L.; OLIVEIRA, J. C. Probability density functions for description of diameter distribution in thinned stands of *Tectona grandis*. *Cerne*, v.18, n.2, p. 185-196, 2012.

BLISS, C. L.; REINKER, K. A. A log normal approach to diameter distributions in even-aged stands. *Forest Science*, v. 10, n.3, p.350-360, 1964.

CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração florestal: Perguntas e respostas**. 4 ed. rev. e ampl. Viçosa: Ed. UFV. 2013. 548p.

CLUTTER, J. L.; BENNETT, F. A. Diameter distributions in old-field slash pine plantations. *Georgia Forest Research Council Report*, n.13, p. 1-9, 1965.

GIBBONS, J. D.; SUBHABRATA, C. **Nonparametric statistical inference**. 3th. ed. (Statistics: textbook and monograph, v.31), New York: Marcel Dekker, 1992, 544p.

GUIMARÃES, D. P. **Desenvolvimento de um modelo de distribuição diamétrica de passo invariante para prognose e projeção da estrutura de povoamentos de eucalipto**. Tese (Doutorado em Ciência Florestal) - Universidade Federal de Viçosa. 1994.

HAFLEY, W. L., SCHREUDER, H. T., Statistical distributions for fitting diameter and height data in ever-aged stands. *Canadian Journal of Forest Research*. v.7 p.184-487. 1977.

LEITE, H. G. **Ajuste de um modelo de estimação de frequência e produção por classe de diâmetro, para povoamentos de *Eucalyptus saligna* Smith**. 1990. Dissertação (Mestrado em Ciência Florestal) – Universidade Federal de Viçosa. Viçosa – Minas Gerais, 1990.

LEITE, H. G.; BINOTI, D. H. B.; GUIMARAES, D. P.; SILVA, M. L. M.; GARCIA, S. L. R. Avaliação do ajuste das funções Weibull e hiperbólica a dados de povoamentos de eucalipto submetidos a desbaste. *Revista Árvore*, Viçosa-MG, v.34, n.2, p. 305-311. 2010.

NAKAGAMI, M. The m distribution- a general formula of intensity distribution signal in rapid fading. *Statistical Methods on Radio Wave Propagation*, n.1, p. 1-35, 1960.

MALTAMO, M.; KANGAS, A.; UUTTERA, J.; TORNIAINEN, T.; SARAMAKI, J. Comparison of percentile based prediction methods and the Weibull distribution in

describing the diameter distribution of heterogeneous Scots pine stands. **Forest Ecology Management**, v.133 n.3 p.263–274. 2000.

MALTAMO, M.; PUUMALAINEN, J.; PAIVINEN, R. Comparison of beta and Weibull functions for modeling basal area diameter distribution in stands of *Pinus sylvestris* and *Picea abies*. **Scand Journal Forest Research**. v.10 p.284–295. 1995.

MENDONÇA, L. A. **Análise da propagação de ondas eletromagnéticas em canais com desvanecimento**. 2002. Dissertação (Mestrado em Telecomunicações) Instituto Nacional de Telecomunicações. Santa Rita do Sapucaí – Minas Gerais, 2002.

NOGUEIRA, G. S.; LEITE, H. G.; CAMPOS, J. C. C.; CARVALHO, A. F.; SOUZA, A. L. de. Modelo de distribuição diamétrica para povoamentos de *Eucalyptus* sp. submetidos a desbaste. **Revista. Árvore**, Viçosa-MG, v.29, n.4, p.579-589, 2005.

NELSON, T. C. Diameter distribution and growth of loblolly pine. **Forest Science**, v.10 n.1, p.105-114, 1964.

PALAHÍ, M.; PUKKALA, T.; TRASOBARES, A. Modelling the diameter distribution of *Pinus sylvestris*, *Pinus nigra* and *Pinus halepensis* forest stands in Catalonia using the truncated Weibull function. **Forestry**, v.79, n.5, p.553-562, 2006.

SHEIKH, A. U.; HANDFORTH M.; ABDI M. Indoor mobile radio channel at 956 MHz: measurements and modeling, IEEE Transactions on Vehicular Technology Conference. (VTC'93) 73-76. 1993.

SIIPILEHTO, J. A. Comparison of two parameter prediction methods for stand structure in Finland. **Silva Fennica**, v.34 n.4 p. 331-349, 2000.

SUSUKI, H. A Statistical model for urban radio propagation. **IEEE Transactions on Vehicular Technology**, v.25 n.7 p. 673-680. 1977.

TÉO, S. J.; ROCHA, S. P.; BORTONCELLO, A. C.; PAZ, R. A.; COSTA, R. H. Dinâmica da distribuição diamétrica de povoamentos de *Pinus taeda*, na região de Caçador, SC. **Pesquisa Florestal Brasileira**, v.31, n.67, p.183-192, 2011